Numerische Integration durch lokale Approximation

Ein Vortrag von Florian Sachs,
Werner-von-Siemens-Gymnasium Magdeburg

Gliederung

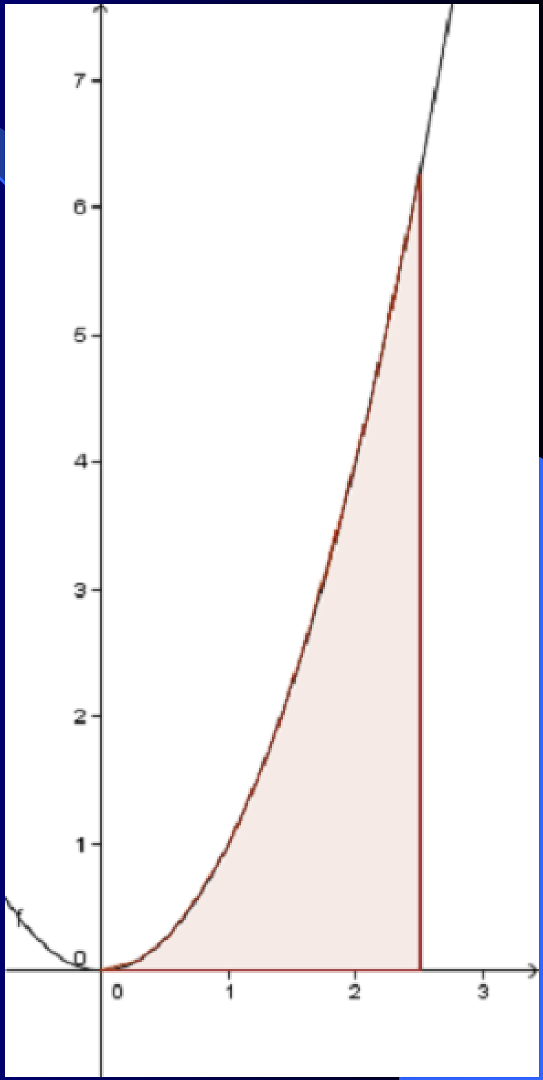
1. Einleitung
2. Trapezregel
3. Keplersche Fassregel
4. Simpsonregel
5. Fazit
6. Quellen

1 Einleitung

- Approximation:
  näherungsweise Berechnung
- Integral:
  – f(x) gegebene Funktion
  – A ist Flächeninhalt zwischen f(x) und x-Achse im Intervall [a,b]
  – F(x) ist Stammfunktion von f(x)

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Alternativ: F‘(x) = f(x)



1 Einleitung

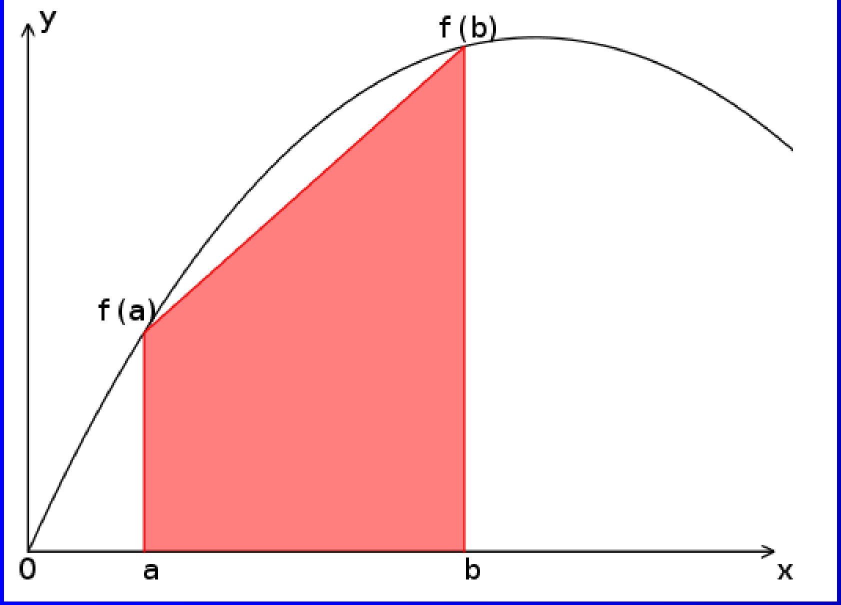
- Problem:
  - Integral häufig nicht berechenbar
  - Korrekte Form teilweise zu kompliziert
  - Funktionen zum Teil nur als Punktwolke (aufgrund von Messungen)

→ Numerische Verfahren nutzen Approximation

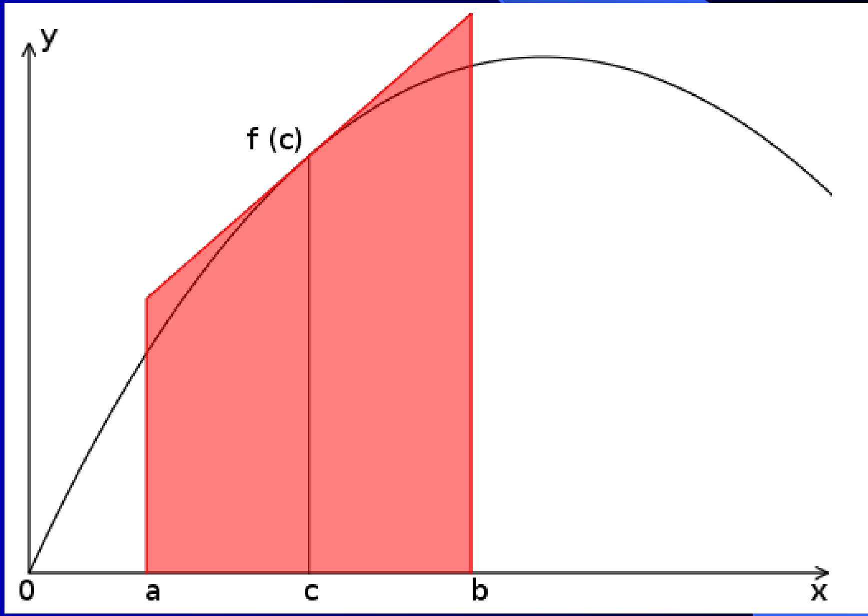
2 Trapezregel

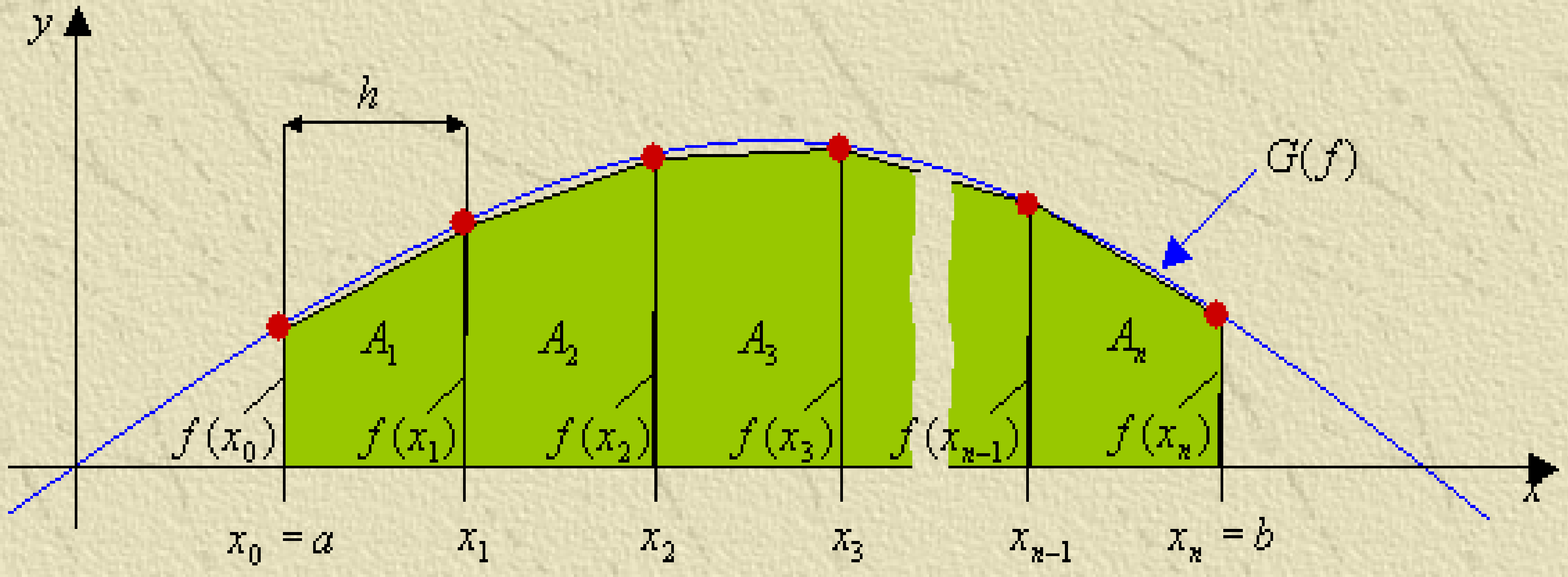
- Unterteilung:

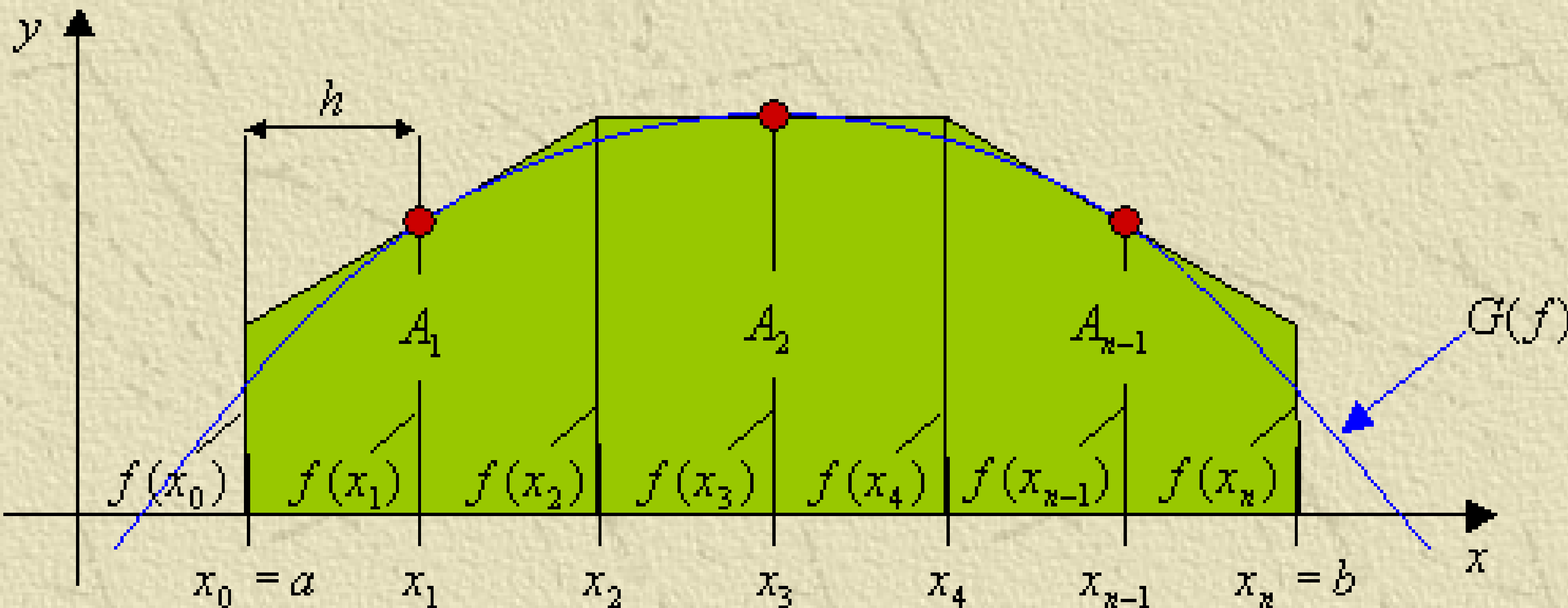
Sehnentrapezregel



Tangententrapezregel




y
h
G(f)
A1
A2
A3
An
f (x0)
f (x1)
f (x2)
f (x3)
f (xn−1)
f (xn)
x
x0 = a
x1
x2
x3
xn−1
xn = b


y
h
G(f)
A1
A2
An−1
f (x0)
f (x1)
f (x2)
f (x3)
f (x4)
f (xn−1)
f (xn)
x
x0 = a
x1
x2
x3
x4
xn−1
xn = b

2 Trapezregel

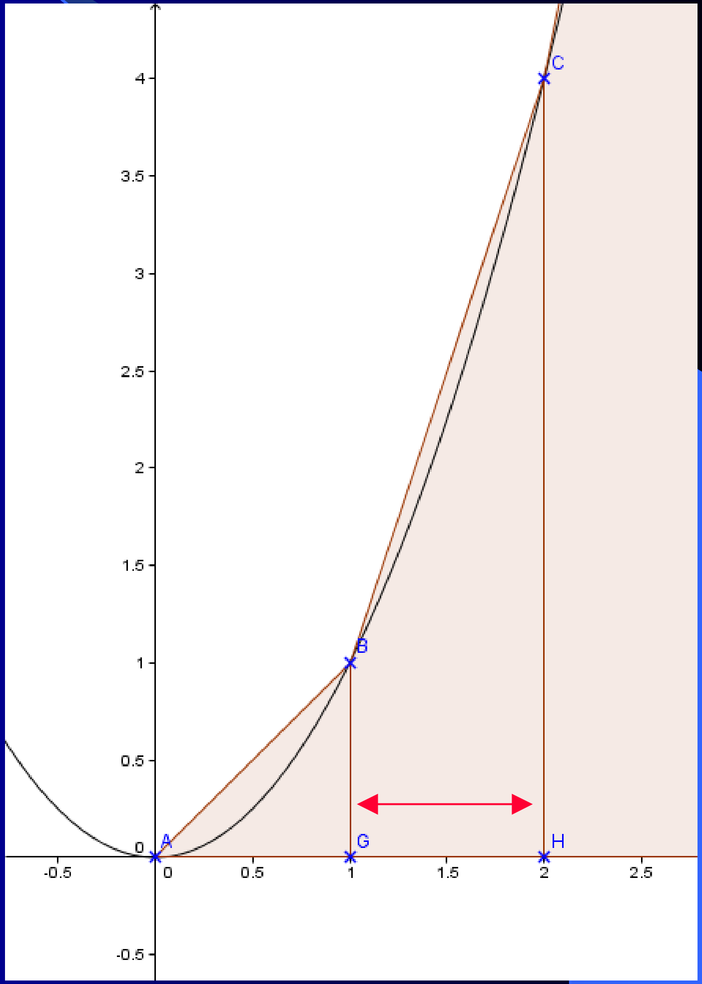
$$h = \frac{b-a}{n}$$

$$A_1 = h \cdot \frac{f(a) + f(a+h)}{2}$$

$$A_2 = \frac{h}{2} \cdot [f(a+h) + f(a+2 \cdot h)]$$

$$A_n = \frac{h}{2} \cdot [f(a+(n-1) \cdot h) + f(b)]$$

$$A = \frac{h}{2} \cdot [f(a) + f(b)] + h \cdot \sum_{k=1}^{n-1} f(a + k \cdot h)$$



$$\int_0^5 x^2 dx$$

$$a = 0; b = 5; n = 5$$

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{5-0}{5} = 1$$

$$A = \frac{h}{2} \cdot [f(a) + f(b)] + h \cdot \sum_{k=1}^{n-1} f(a + k \cdot h)$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot [f(0) + f(5)] + 1 \cdot \sum_{k=1}^{4} f(0 + k \cdot 1)$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot [f(0) + f(5)] + f(1) + f(2) + f(3) + f(4)$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot [0^2 + 5^2] + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2$$

$$A = 42{,}5$$

2 Trapezregel

$$\int_0^2 x^{3x-1}\,dx$$

$$n = 6$$

$$\int_1^5 \frac{5}{x}\,dx$$

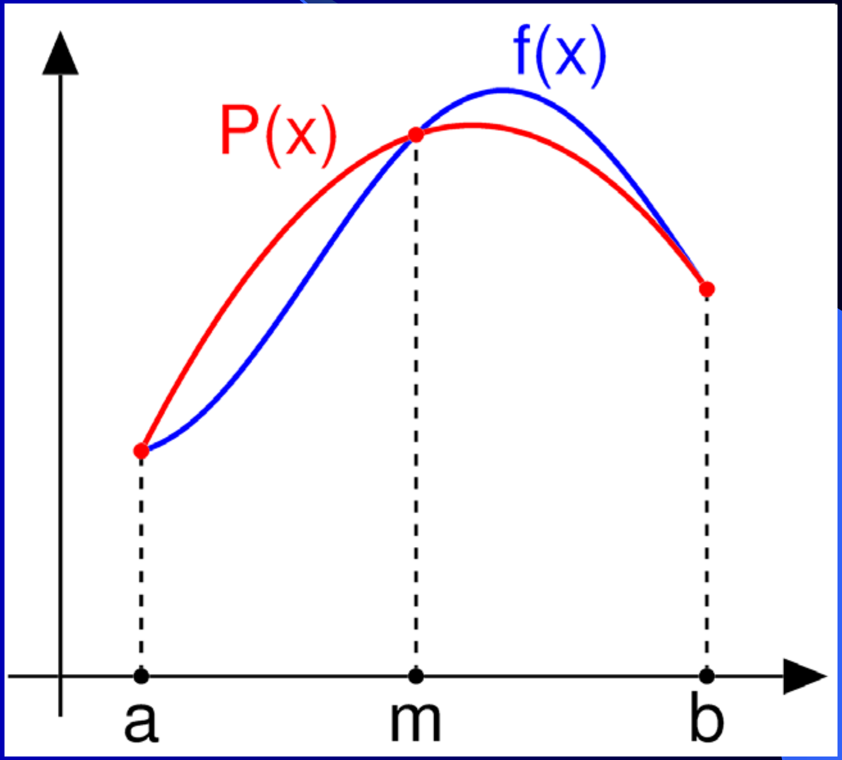
$$n = 4$$

$$A = \frac{h}{2} \cdot [\,f(a) + f(b)] + h \cdot \sum_{k=1}^{n-1} f(a + k \cdot h)$$

3 Keplersche Fassregel

- Annäherung durch Parabeln
- Drei Stützstellen (a, b, m)

$$m = \frac{a+b}{2}$$



3 Keplersche Fassregel

$$P(x) = r \cdot x^2 + s \cdot x + t$$

$$f(a) = P(a) = r \cdot a^2 + s \cdot a + t$$

$$f(b) = P(b) = r \cdot b^2 + s \cdot b + t$$

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) = P\left(\frac{a+b}{2}\right) = r \cdot \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + s \cdot \frac{a+b}{2} + t$$

$$\int_a^b P(x)dx = \int_a^b (r \cdot x^2 + s \cdot x + t)dx = \left[\frac{1}{3} r \cdot x^3 + \frac{1}{2} s \cdot x^2 + t \cdot x\right]_a^b$$

$$A = \frac{b-a}{6} \cdot \left(f(a) + 4 \cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right)$$

$$\int_0^5 x^2 dx$$

$$a = 0; b = 5$$

$$A = \frac{b-a}{6} \cdot \left(f(a) + 4 \cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right)$$

$$A = \frac{5}{6} \cdot \left(f(0) + 4 \cdot f\left(\frac{0+5}{2}\right) + f(5) \right)$$

$$A = \frac{5}{6} \cdot \left(0^2 + 4 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 5^2 \right)$$

$$A = 41\frac{2}{3}$$

3 Keplersche Fassregel

$$\int_0^2 (x^3 - 2x^2 + 9)dx \qquad \int_0^2 (x^2 - 7x^2 + 2)dx$$

$$A = \frac{b-a}{6} \cdot \left(f(a) + 4 \cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right)$$

4 Simpsonregel

- Betrachtung von beiden Trapezregeln (n=5)

$$\int_0^5 x^2 dx = 41\frac{2}{3}$$

$$Q_s(f) = \frac{h}{2} \cdot [f(a) + f(b)] + h \cdot \sum_{k=1}^{n-1} f(a + k \cdot h) = 42{,}5$$

$$\Rightarrow 1{,}96\%$$

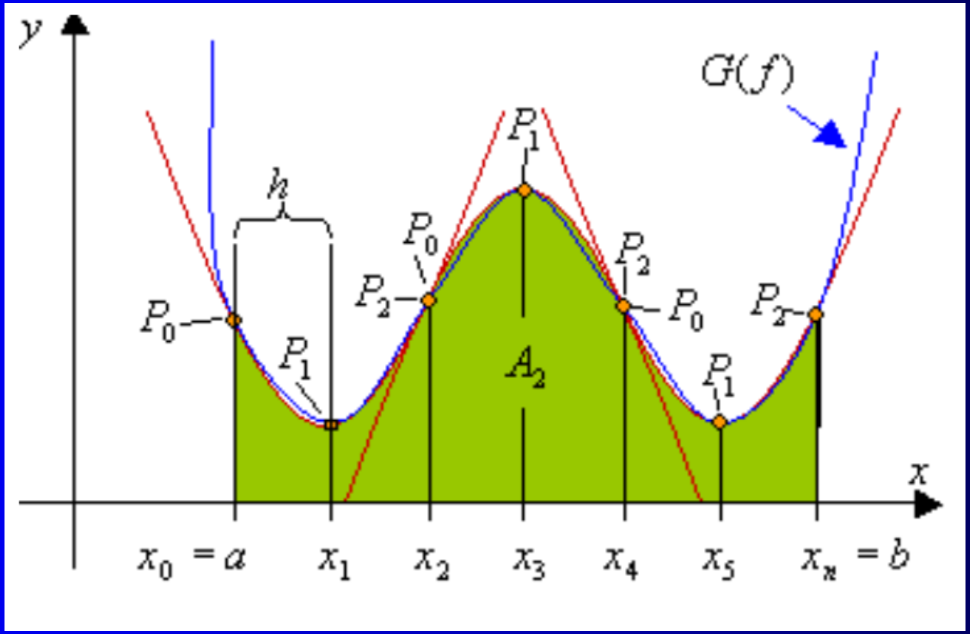
$$Q_T(f) = h \cdot \sum_{k=1}^{n} f(a + h \cdot \frac{2 \cdot i - 1}{2}) = 41{,}25$$

$$\Rightarrow 1{,}00\%$$

4 Simpsonregel

$$A = \frac{1}{3} + [Q_s(f) + 2 \cdot Q_T(f)]$$

$$A = \frac{h}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} f(a) + \sum_{k=1}^{n-1} f(a + k \cdot h) + 2 \cdot \sum_{k=1}^{n} f(a + h \cdot \frac{2 \cdot k - 1}{2}) + \frac{1}{2} f(b) \right)$$



$$\int_0^5 x^2 dx$$

$$a = 0; b = 5; n = 5$$

$$A = \frac{h}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} f(a) + \sum_{k=1}^{n-1} f(a + k \cdot h) + 2 \cdot \sum_{k=1}^{n} f(a + h \cdot \frac{2 \cdot k - 1}{2}) + \frac{1}{2} f(b) \right)$$

$$A = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} f(0) + \sum_{k=1}^{4} f(0 + k \cdot 1) + 2 \cdot \sum_{k=1}^{5} f(0 + 1 \cdot \frac{2 \cdot k - 1}{2}) + \frac{1}{2} f(5) \right)$$

$$A = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} f(0) + f(1) + f(2) + f(3) + f(4) + \ldots \right.$$

$$\left. \ldots + 2 \cdot \left[f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{3}{2}\right) + f\left(\frac{5}{2}\right) + f\left(\frac{7}{2}\right) + f\left(\frac{9}{2}\right) \right] + \frac{1}{2} f(5) \right)$$

$$A = \frac{1}{3} \left(0 + 1 + 4 + 9 + 16 + 2 \cdot \left[\frac{1}{4} + \frac{9}{4} + \frac{25}{4} + \frac{49}{4} + \frac{81}{4} \right] + \frac{1}{2} \cdot 25 \right)$$

$$A = 41\frac{2}{3}$$

4 Simpsonregel

$$\int_{-2}^{1} (x^5 + 3x^2)\,dx$$

$$n = 2$$

$$\int_{-2}^{1} (-x^4 - 5x^3 - 4x^2 + 10x + 20)\,dx$$

$$n = 3$$

$$A = \frac{h}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} f(a) + \sum_{k=1}^{n-1} f(a + k \cdot h) + 2 \cdot \sum_{k=1}^{n} f(a + h \cdot \frac{2 \cdot k - 1}{2}) + \frac{1}{2} f(b) \right)$$

5 Fazit

- Rechteckregel generell am schlechtesten
- Trapezregel besser, da näher an Funktion
- Keplersche Fassregel liefert bei ganzrationalen Funktionen maximal 3. Grades exakte Ergebnisse
- Simpsonregel durch Parabelstücke sehr gut

5 Fazit

- Verwendung von Kurven höherer Ordnung
  - 3/8-Regel
- Extrapolation der Flächeninhalte von Kurven kleinerer Ordnung (Trapezverfahren)
  - noch bessere Näherungen
  - Romberg-Verfahren mittels Richardson-Extrapolation
  - Verwendung bereits errechneter Funktionswerte

Numerik.exe

6 Quellen

- Literatur:
  - J. Stoer: Numerische Mathematik, Springer-Verlag, 2005
  - Material aus dem Public-Verzeichnis des WvSG
- Internet: (Stand: 02.01.2010)
  - http://www.glastyn.de
  - http://www.illinois.edu
  - http://www.uni-goettingen.de
  - http://www.wikipedia.org
- Computerprogramme:
  - GeoGebra zum Zeichnen der Beispiele

Ich bedanke mich für Eure Aufmerksamkeit und stehe Euch nun für Fragen zur Verfügung.

Präsentation verfügbar unter:
www.florian-sachs.de